BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

SUBIECTUL II

Fie $(G,\cdot)$ un grup în care nu există elemente de ordinul 2. Să se arate că dacă $(xy)^2=(yx)^2$, pentru orice $x,y\in G$ atunci G este grup abelian.

Soluţie:

Fie $x,y\in G$ şi $z=xy(yx)^{-1}$. Arătăm că $z^2=e$ şi cum G nu are elemente de ordin 2 atunci $z=e$,

adică $xy(yx)^{-1}=e\Leftrightarrow xy=yx$ 1p

$x^2y^{-1}=((xy)\cdot y^{-1})^2\cdot y^{-1}=(y^{-1}\cdot(xy))^2\cdot y^{-1}=y^{-1}\cdot xy\cdot y^{-1}\cdot xy\cdot y^{-1}=y^{-1}\cdot x^2$ 1p

Rezultă că $x^{-1}\cdot x^2\cdot y^{-1}=x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot x^2\Rightarrow x\cdot y^{-1}=x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot x^2\Rightarrow x\cdot y^{-1}\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot y^{-1}\cdot x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\cdot(xy)^{-1}=(yx)^{-1}\cdot x$ 2p

Analog $y\cdot(yx)^{-1}=(xy)^{-1}\cdot y$ 1p

$z^2=xy(yx)^{-1}\cdot xy(yx)^{-1}=xy\cdot((yx)^{-1}\cdot x)\cdot y\cdot(yx)^{-1}=xy\cdot x\cdot(xy)^{-1}\cdot y\cdot(yx)^{-1}=$

$=xyx\cdot((xy)^{-1}\cdot y)\cdot(yx)^{-1}=xyxy\cdot(yx)^{-1}\cdot(yx)^{-1}=(xy)^2\cdot(yx)^{-2}=(yx)^2\cdot(yx)^{-2}=e$ 2p